

TP-DM de mathématiques n°7

Schémas numériques – Corrigé

Dans ce TP-DM, on considère $T > 0$ un temps maximal, $z_0 \in \mathbb{R}$ une donnée initiale et une fonction f de classe \mathcal{C}^∞ . On considère une équation de la forme

$$(P) \quad \begin{cases} y'(t) = f(y(t)) & \text{pour tout } t \in [0, T] \\ y(0) = z_0 \end{cases}$$

Par exemple, avec $f = \ln$ on obtient $y'(t) = \ln(y(t))$ dans la première ligne. On admet que le système (P) admet une unique solution¹. Le problème (P) peut être résolu de manière exacte, mais on ne dispose pas toujours d'une forme explicite des solutions avec des fonctions usuelles. On va étudier une méthode pour **obtenir une solution approchée** de (P) , obtenue par **simulation numérique**.

Principe des schémas numériques

Un ordinateur ne peut pas calculer les valeurs de la solution de (P) pour une infinité de valeurs t dans \mathbb{R}_+ . On va donc approcher la solution sur $N + 1$ points temporels t_0, \dots, t_N avec $t_0 = 0$ et $t_N = T$. On prend en général ces points temporels équidistants, de sorte que, en posant un **pas de temps** noté $h = \frac{T}{N}$, on a $t_n = nh$ pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

On notera $z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ la solution exacte du problème (P) . Une méthode numérique consistera donc à approcher les points $z(t_0), \dots, z(t_N)$ par des valeurs notées y_0, \dots, y_N qu'on calcule selon un **schéma numérique**. Il existe de nombreux schémas, chacun avec ses avantages et inconvénients (précision, temps de calcul, ...). On va étudier le plus simple : le schéma d'Euler explicite.

Le schéma d'Euler explicite

Comme $t_{n+1} = t_n + h$ et que h est supposé très petit, on peut approximer $z'(t_n)$ par le taux d'accroissement de z entre t_n et t_{n+1} :

$$z'(t_n) \approx \frac{z(t_{n+1}) - z(t_n)}{h}$$

ce qui conduit à, puisque z vérifie (P) :

$$z(t_{n+1}) \approx z(t_n) + h z'(t_n) = z(t_n) + h f(z(t_n))$$

Le schéma d'Euler explicite consiste donc à construire la suite de points y_0, \dots, y_N selon un modèle similaire :

$$(EE) \quad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(y_n) & \text{pour tout } n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ y_0 = z_0 \end{cases}$$

La valeur z_0 étant connue, on obtient donc une relation de récurrence qui permet de calculer successivement y_1, y_2, \dots, y_N .

- 1) Montrer que z est de classe \mathcal{C}^2 . En déduire que $z(t_n + h) = z(t_n) + h z'(t_n) + \underset{h \rightarrow 0}{O}(h^2)$. On considérera t_n indépendant de h dans ce calcul².

1. C'est une généralisation du théorème de Cauchy-Lipschitz, au programme de MP

2. $t_n = nh$ et quand $h \rightarrow 0$, on a $N \rightarrow +\infty$. On peut alors choisir n de sorte que nh soit à peu près constant...

Pour tout $t \in [0, T]$, on a $z'(t) = (f \circ z)(t)$. Or, la fonction $f \circ z$ est continue par composée de telles fonctions. On en déduit que z' est continue, donc z est de classe \mathcal{C}^1 . Ainsi, $f \circ z$ est de classe \mathcal{C}^1 par composée de telles fonctions, donc z' est aussi de classe \mathcal{C}^1 . Finalement, z est bien de classe \mathcal{C}^2 .

Par la formule de Taylor-Young au point t_n , on a (si $t_n + h \in [0, T]$) :

$$\begin{aligned} z(t_n + h) &= z(t_n) + hz'(t_n) + \frac{h^2}{2}z''(t_n) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^2) \\ &= z(t_n) + hz'(t_n) + h^2 \times \left(\frac{1}{2}z''(t_n) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(1) \right) \\ &= \boxed{z(t_n) + hz'(t_n) + \underset{h \rightarrow 0}{O}(h^2)} \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant $z(t_{n+1})$ par $z(t_n) + hz'(t_n)$ on commet une erreur en $O(h^2)$. On parle d'**erreur locale** en $O(h^2)$. Pour passer de $z(t_0)$ à $z(t_N)$, on ajoute donc N fois cette erreur, ce qui crée une **erreur globale** en $NO(h^2) = O(h)$ car $N = \frac{T}{h}$. On dit que la méthode d'Euler explicite est **d'ordre 1**.

Cas d'application simple

On considère dans cette partie que f est l'identité, donc la première ligne de (P) est l'équation $y' = y$.

2) Expliciter la solution exacte z en fonction de z_0 .

(P) est un problème de Cauchy. On constate que la fonction $\boxed{z(t) = z_0 e^t}$ est solution de (P) . Par unicité via le théorème de Cauchy-Lipschitz, c'est la seule solution.

Note : cette rédaction est la plus rapide, mais il est conseillé de revoir la méthode générale si nécessaire.

3) Déterminer la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ définie par le schéma (EE) . On exprimera y_n en fonction de N , T et z_0 .

On a, pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(y_n) \\ &= y_n + hy_n \\ &= (1 + h)y_n \end{aligned}$$

On reconnaît une suite géométrique de raison $1 + h$. Ainsi,

$$\begin{aligned} y_n &= (1 + h)^n y_0 \\ &= (1 + h)^n z_0 \\ &= \boxed{\left(1 + \frac{T}{N}\right)^n z_0} \end{aligned}$$

4) Montrer que y_N tend vers $z(T)$ quand N tend vers $+\infty$.

Par ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}y_N &= \left(1 + \frac{T}{N}\right)^N z_0 \\ &= z_0 e^{N \ln\left(1 + \frac{T}{N}\right)}\end{aligned}$$

Implémentation d'Euler explicite

Sur Capytale, récupérer le TP avec le code **dfd9-10265382**. Ce TP devra être rendu avant mardi 10h !

5) Écrire une fonction `temps(T,N)` qui retourne la liste de temps $[t_0, \dots, t_N]$. Définir aussi une fonction `f(y)` qui, pour le moment, retourne juste son argument `y`.

▮ Voir le corrigé sur Capytale, avec le code : **580d-10841763**

6) Écrire une fonction `EExp(T,N,z0,f)` qui retourne la liste $[y_0, \dots, y_N]$ calculée par le schéma (EE).

▮ Voir le corrigé sur Capytale, avec le code : **580d-10841763**

7) Tracer sur un même graphe les valeurs $z(t_n)$, avec z trouvé en question 2) et les valeurs y_0, \dots, y_N . On prendra $T = 10$, $z_0 = 1$ et $N = 100$. Comparer avec $N = 1000$ et vérifier la convergence.

▮ Voir le corrigé sur Capytale, avec le code : **580d-10841763**

Une équation d'ordre 2

On s'intéresse maintenant à une équation du second ordre

$$(P_2) \quad \begin{cases} y''(t) = -y(t) & \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) = z_0 \\ y'(0) = z_1 \end{cases}$$

Ce problème, là encore facile à résoudre, peut modéliser le déplacement horizontal d'un système masse-ressort (en prenant la masse et la raideur du ressort égaux à 1) ou encore celui d'un pendule pour de petits angles. Pour étudier (P_2) , on pose $p = y$ et $q = y'$, ce qui permet de réécrire (P_2) sous la forme d'un système d'équations couplées :

$$\begin{cases} p' = q \\ q' = -p \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p(0) = z_0 \\ q(0) = z_1 \end{cases}$$

et on obtient le schéma d'Euler explicite correspondant de manière similaire à ce qui précède : on définit les suites $(p_n)_{0 \leq n \leq N}$ et $(q_n)_{0 \leq n \leq N}$ par

$$(EE_2) \quad \begin{cases} p_{n+1} = p_n + hq_n \\ q_{n+1} = q_n - hp_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \quad \text{et} \quad \begin{cases} p_0 = z_0 \\ q_0 = z_1 \end{cases}$$

8) Écrire une fonction `EExp2(T,N,z0,z1,f,g)` qui retourne les listes $[p_0, \dots, p_N]$ et $[q_0, \dots, q_N]$ selon (EE_2) .

Voir le corrigé sur Capytale, avec le code : **580d-10841763**

- 9) Tracer les valeurs p_0, \dots, p_N en fonction du temps. On prendra $T = 100$, $z_0 = 1$, $z_1 = 0$ et $N = 10\,000$. Quel est le comportement en temps long de ce système lorsque le temps est très élevé ? Est-ce cohérent ?

Voir le corrigé sur Capytale, avec le code : **580d-10841763**

On constate un défaut du schéma d'Euler explicite, dû au fait qu'il **ne conserve pas l'énergie totale** de ce système. Cette énergie totale correspond à la somme de l'énergie potentielle élastique et de l'énergie cinétique. Les constantes physique étant unitaires, l'énergie totale vaut :

$$E(t) = \frac{1}{2}y(t)^2 + \frac{1}{2}y'(t)^2 = \frac{1}{2}p(t)^2 + \frac{1}{2}q(t)^2$$

- 10) Vérifier que la fonction E est constante.

La fonction E est dérivable par somme et composée de telles fonctions. On a de plus, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2} \times 2p(t)p'(t) + \frac{1}{2} \times 2q(t)q'(t) \\ &= p(t)q'(t) - q(t)p'(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalement, E est constante.

- 11) Pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, on pose $e_n = p_n^2 + q_n^2$. Montrer que la suite (e_n) est géométrique et qu'elle tend vers $+\infty$, et ce quel que soit la valeur du paramètre h dans \mathbb{R}_+^* .

On a :

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= p_{n+1}^2 + q_{n+1}^2 \\ &= (p_n + hq_n)^2 + (q_n - hp_n)^2 \\ &= p_n^2 + 2hp_nq_n + h^2q_n^2 + q_n^2 - 2hq_np_n + h^2p_n^2 \\ &= (1 + h^2)(p_n^2 + q_n^2) \\ &= (1 + h^2)e_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (e_n) est géométrique.

- Si $e_0 = 0$ (i.e. $z_0 = z_1 = 0$), alors $e_n = 0$ et la suite (e_n) tend donc vers $\boxed{0}$. C'est cohérent car si $z_0 = z_1 = 0$, la seule solution de (P_2) est $z \equiv 0$.
- Sinon, on a $e_0 > 0$ (car $e_0 \geq 0$), de sorte que $e_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \boxed{+\infty}$.

On constate que les suites (p_n) et (q_n) divergent en prenant tour à tour des valeurs extrêmes de plus en plus grandes (puisque $p_n^2 + q_n^2 \rightarrow +\infty$). La solution approchée ne vérifie donc pas une propriété essentielle de la solution exacte. Pour combler cette faille d'Euler explicite, on peut utiliser une autre méthode, appelée **Euler symplectique**, définie par :

$$(ES) \quad \begin{cases} p_{n+1} = p_n + hq_n \\ q_{n+1} = q_n - hp_{n+1} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \quad \text{et} \quad \begin{cases} p_0 = z_0 \\ q_0 = z_1 \end{cases}$$

La seule différence avec (EE_2) est donc qu'on utilise la nouvelle valeur p_{n+1} pour passer de q_n à q_{n+1} .

- 12) Écrire une fonction **ESymp**(T, N, z0, z1, f, g) qui retourne les listes $[p_0, \dots, p_N]$ et $[q_0, \dots, q_N]$ selon le schéma (ES) . Vérifier par un tracé que le problème de (EE_2) semble résolu.

Voir le corrigé sur Capytale, avec le code : **580d-10841763**

- 13) Tracer sur le graphe l'évolution de $p_n^2 + q_n^2$. Vérifier que le schéma (ES) ne conserve pas l'énergie totale du système, mais que cette dernière reste bornée.

Voir le corrigé sur Capytale, avec le code : **580d-10841763**

- 14) (**calculatoire, facultatif**) Pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, on pose $e'_n = p_n^2 + q_n^2 + hp_nq_n$. Montrer que la suite (e'_n) est constante.

On a

$$\begin{aligned} e'_{n+1} &= p_{n+1}^2 + q_{n+1}^2 + hp_{n+1}q_{n+1} \\ &= p_{n+1}^2 + (q_n - hp_{n+1})^2 + hp_{n+1}(q_n - hp_{n+1}) \\ &= p_{n+1}^2 + q_n^2 - 2hp_{n+1}q_n + h^2p_{n+1}^2 \\ &\quad + hp_{n+1}q_n - h^2p_{n+1}^2 \\ &= p_{n+1}^2 + q_n^2 - hp_{n+1}q_n \\ &= (p_n + hp_n)^2 + q_n^2 - h(p_n + hp_n)q_n \\ &= p_n^2 + 2hp_nq_n + h^2q_n^2 + q_n^2 - hp_nq_n - h^2q_n^2 \\ &= p_n^2 + q_n^2 + hp_nq_n \\ &= e'_n \end{aligned}$$

On en déduit que (e'_n) est bien une suite constante.

Dans les faits, le schéma (ES) ne garantit pas que l'énergie est constante. Si on pose $X = p(t)$ et $Y = q(t)$, alors un système à énergie constante vérifierait $X^2 + Y^2 = \text{Cste}$, ce qui signifie que X et Y sont astreints à un cercle. Ici, on a $X^2 + Y^2 + hXY = \text{Cste}$, ce qui est en fait l'équation d'une ellipse. Cela nous assure au moins que X et Y sont bornés, ce qui n'était pas le cas avec le schéma (EE)...

La récompense du TP-DM : un système proie-prédateur

On s'intéresse aux variations de populations de deux espèces animales : les proies, dont on note $x(t)$ la population au temps t , et les prédateurs, dont on note $y(t)$ la population au temps t . On considère le système suivant :

$$(PP) \quad \begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

avec $a, b, c, d, x_0, y_0 \in \mathbb{R}_+^*$ des valeurs données et connues. Commentons chaque équation. Lorsque $y = 0$ (absence de prédateur), la première équation donne $x' = ax$: le nombre d'individus croît exponentiellement vite. Le terme bxy représente la perte d'individus par prédation : plus $x(t)$ et $y(t)$ sont élevés, plus ce terme est important. Quant aux prédateurs, lorsque $x = 0$ (absence de proie), l'équation donne $y' = -cy$, leur nombre décroît exponentiellement vite. Le terme dxy représente le "gain" d'individus par prédation : c'est justement la présence de proies qui permet à la population de prédateurs de se maintenir.

On ne peut pas calculer d'expression simple de x et de y en fonction de t : un schéma numérique s'impose. Ici, on va une fois encore utiliser le schéma d'Euler explicite.

- 15) Suivre les instructions à la fin du notebook. La fonction `euler` devra renvoyer les listes $[x_0, \dots, x_N]$ et $[y_0, \dots, y_N]$ calculés par un schéma d'Euler explicite. **Compiler et admirer le résultat !**

On constate que $x(t) + y(t)$ tend vers $+\infty$, soit un comportement assez similaire à celui du système masse ressort. Mais comme on ne connaît pas la solution exacte de (PP) , beaucoup de questions se posent (cf ci-dessous). **Ces questions peuvent d'ailleurs concerner bien d'autres modèles que celui-là et peuvent enrichir vos réflexions en TIPE!**

Choix du modèle

- **A)** Est-ce que le fait que $x(t) + y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ est cohérent biologiquement? Réponse non : si l'environnement ne dispose que d'un nombre limité de ressources, il ne peut pas accueillir une infinité de proies...
- **B)** Le problème vient-il alors du modèle (PP) , qui ne représente pas assez bien la réalité? Peut-être peut-on modifier le terme ax en $ax(1 - x)$ pour tenir compte des ressources limitées de l'environnement (cf DM4)?

Choix du schéma

- **C)** Mais peut-être le problème sus-mentionné vient-il du choix d'Euler explicite? Le problème est-il le même et dans les mêmes proportions, pour d'autres schémas?
- **D)** Existe-t-il un équivalent de l'énergie totale pour ce système? Quelle serait son expression? Ceci permettrait de trancher la question C), mais est-elle si facile à trouver?
- **E)** En admettant avoir trouvé une énergie à la question **D)**, quel schéma numérique pourrait la conserver?

Points d'équilibre du système

- **F)** Existe-t-il un état d'équilibre de ce système? C'est-à-dire des valeurs du couple (x_0, y_0) pour lesquelles les fonctions x et y solutions sont constantes? (Réponse : oui, vous pouvez les trouver)
- **G)** Pour chaque point d'équilibre, est-il stable ou instable : si (x_0, y_0) est proche de ce point d'équilibre, est-ce que la solution va y converger (stable) ou au contraire s'en éloigner (instable)?
- **H)** Et si on modifiait le modèle pour mettre une intervention humaine, par exemple avec un terme $-ex$ pour la proie et/ou $-fy$ pour le prédateur? Peut-on de cette manière faire converger le système vers un point d'équilibre instable? Comment y arriver le plus vite possible?

Prolongements divers

- **I)** Les réponses précédentes sont-elles affectées par les valeurs des paramètres a, b, c, d ? de x_0 et y_0 ?
- **J)** Et si on faisait dépendre ces paramètres du temps, pour tenir compte de la saison ou de la température moyenne?
- **K)** Que se passe-t-il si on rajoute une troisième espèce qui serait prédateur de x et proie de y ?
- **L)** Et si on rajoutait une troisième espèce pour obtenir un "poule / renard / vipère", où chaque espèce est prédatrice d'une autre et proie de la troisième?